28. Параметрлік теңдеулермен берілген қисық доғасының ұзындығы туралы теореманың тұжырымын келтіріңіз. Мысал келтіріңіз.
29. Егер жазықтықтағы қисық теңдеуі $y = f(x)$, $a \le x \le b$ түрінде берілсе, онда оның ұзындығының формуласын жазыңыз. Мысал келтіріңіз.
30. Егер жазықтықтағы қисық теңдеуі полярлық коорди-наттар арқылы берілсе, онда оның ұзындығының формуласын жазыңыз. Мысал келтіріңіз.
31. Жазық фигураның ауданын табу формуласын, фигураны шектеп тұрған қисық теңдеуінің берілу түріне байланыстырып жазыңыз. Мысал келтіріңіз.
32. Айналу денесінің көлемін табу формуласын жазыңыз. Мысал келтіріңіз.

8.1-ҮТ

Анықталған интегралдарды үтірден кейін екі мәнге дейінгі дәлдікпен есептеңіз

1.

1.1. $\int_0^{\sqrt{3}} x \sqrt[3]{1+x^2}\,dx.$ **(Жауабы: 2,01.)**

1.2. $\int_0^{2\sqrt[6]{3}} \frac{12x^5\,dx}{\sqrt{x^6+1}}.$ **(Жауабы: 51,56.)**

1.3. $\int_0^1 \frac{x^2\,dx}{x^2+1}.$ **(Жауабы: 0,21.)**

1.4. $\int_0^{\pi/2} \sin x \cos^2 x dx.$ **(Жауабы: 0,33.)**

1.5. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{1+\cos x}dx.$ **(Жауабы: 0,57.)**

1.6. $\int\limits_{3/4}^{4/3} \frac{dx}{x^2+1}$. **(Жауабы: 0,41.)**

1.7. $\int\limits_{0}^{-3} \frac{dx}{\sqrt{25+3x}}$. **(Жауабы: - 0,67.)**

1.8. $\int\limits_{0}^{2} \frac{x^3\,dx}{\sqrt{x^4+4}}$. **(Жауабы: 1,24.)**

1.9. $\int\limits_{1}^{e} \frac{1+\ln x}{x} dx$. **(Жауабы: 1,50.)**

1.10. $\int\limits_{0}^{1} \frac{z^3}{z^8+1} dz$. **(Жауабы: 0,20.)**

1.11. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/2} \frac{dx}{1-\cos 2x}$. **(Жауабы: 0,50.)**

1.12. $\int\limits_{2}^{5} \frac{dx}{\sqrt{5+4x-x^2}}$. **(Жауабы: 1,57.)**

1.13. $\int\limits_{0}^{1} x^3\sqrt{4+5x^4}\,dx$. **(Жауабы: 0,63.)**

1.14. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} \sin^2 \frac{x}{2} dx$. **(Жауабы: 3,14.)**

1.15. $\int\limits_{1}^{2} \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} dx$. **(Жауабы: 1,07.)**

1.16. $\int\limits_{1}^{1/2} \frac{x\,dx}{\sqrt{1-x^2}}$. **(Жауабы: 0,13.)**

1.17. $\int\limits_{0}^{1} 3\left(x^2+x^2e^{x^3}\right) dx$. **(Жауабы: 2,72.)**

1.18. $\int\limits_{\pi^2/9}^{\pi^2} \frac{\cos\sqrt{x}}{\sqrt{x}}dx.$ **(Жауабы: - 1,73.)**

1.19. $\int\limits_{1}^{\sqrt[6]{3}} \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1+x^6}}.$ **(Жауабы: 0,09.)**

1.20. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\sin\ln x}{x}dx.$ **(Жауабы: 0,46.)**

1.21. $\int\limits_{1}^{\sqrt{e}} \frac{dx}{x\sqrt{1-\ln^2 x}}dx.$ **(Жауабы: 0,52.)**

1.22. $\int\limits_{3}^{8} \sqrt{x+1}\,dx.$ **(Жауабы: 12,67.)**

1.23. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \sin\alpha\cos^3\alpha\,d\alpha.$ **(Жауабы: 0,14.)**

1.24. $\int\limits_{\pi/18}^{\pi/6} 12\,\mathrm{ctg}\,3x dx.$ **(Жауабы: 2,77.)**

1.25. $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt{4-3x}}.$ **(Жауабы: 0,67.)**

1.26. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{x\,dx}{\sqrt{4-x^2}}.$ **(Жауабы: 0,32.)**

1.27. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x}dx.$ **(Жауабы: 0,33.)**

1.28. $\int\limits_{-1}^{0} \frac{dx}{4x^2-9}.$ **(Жауабы: - 0,13.)**

1.29. $\int\limits_{\pi/6}^{\pi/2} \cos\alpha\sin^3\alpha\,d\alpha.$ **(Жауабы: 0,23.)**

1.30. $\int\limits_{0}^{\sqrt{\pi}/4} \frac{xdx}{\cos^2\left(x^2\right)}.$ **(Жауабы: 0,50.)**

2.

2.1. $\int\limits_{2}^{3} y\ln\left(y-1\right)dy.$ **(Жауабы: 1,02.)**

2.2. $\int\limits_{-2}^{0} x^2 e^{-\frac{x}{2}}\,dx.$ **(Жауабы: 5,76.)**

2.3. $\int\limits_{0}^{\pi/2} x\cos x\,dx.$ **(Жауабы: 0,57.)**

2.4. $\int\limits_{0}^{\pi} x^2 \sin x\,dx.$ **(Жауабы: 5,86.)**

2.5. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \arccos 2x\,dx.$ **(Жауабы: 1,57.)**

2.6. $\int\limits_{1}^{2} \left(y-1\right)\ln y\,dy.$ **(Жауабы: 0,25.)**

2.7. $\int\limits_{-1/2}^{0} xe^{-2x}\,dx.$ **(Жауабы: - 0,25.)**

2.8. $\int\limits_{-\pi}^{\pi} x\sin x\cos x\,dx.$ **(Жауабы: - 1,57.)**

2.9. $\int\limits_{-1/3}^{-2/3} \frac{x}{e^{3x}}\,dx.$ **(Жауабы: 0,82.)**

2.10. $\int\limits_{1}^{e} \frac{\ln^2 x}{x^2}\,dx.$ **(Жауабы: 0,16.)**

2.11. $\int\limits_{1}^{e^2} \sqrt{x}\ln x dx.$ **(Жауабы: 18,33.)**

2.12. $\int_0^1 \operatorname{arctg}\sqrt{x}\, dx.$ **(Жауабы: 0,57.)**

2.13. $\int_0^{\pi} (x+2)\cos\frac{x}{2}\, dx.$ **(Жауабы: 6,28.)**

2.14. $\int_0^{\pi/8} x^2 \sin 4x\, dx.$ **(Жауабы: 0,02.)**

2.15. $\int_1^2 y^2 \ln y\, dy.$ **(Жауабы: 1,07.)**

2.16. $\int_1^2 \frac{\ln(x+1)}{(x+1)^2}\, dx.$ **(Жауабы: 0,15.)**

2.17. $\int_{3/2}^2 \operatorname{arctg}(2x-3)\, dx.$ **(Жауабы: 0,21.)**

2.18. $\int_0^{\pi/2} (x+3)\sin x\, dx.$ **(Жауабы: 4,00.)**

2.19. $\int_1^2 x\ln^2 x\, dx.$ **(Жауабы: 1,60.)**

2.20. $\int_{-3}^0 (x-2)e^{-\frac{x}{3}}\, dx.$ **(Жауабы: - 19,32.)**

2.21. $\int_0^{\pi/9} \frac{xdx}{\cos^2 3x}.$ **(Жауабы: 0,12.)**

2.22. $\int_{1/2}^1 \arcsin(1-x)\, dx.$ **(Жауабы: 0,13.)**

2.23. $\int_1^{\sqrt{3}} \operatorname{arctg}\frac{1}{x}\, dx.$ **(Жауабы: 0,47.)**

2.24. $\int\limits_{-1}^{0} x\ln(1-x)\,dx.$ **(Жауабы: - 0,25.)**

2.25. $\int\limits_{0}^{1} \arcsin\frac{x}{2}\,dx.$ **(Жауабы: - 0,56.)**

2.26. $\int\limits_{1}^{2} \ln(3x+2)\,dx.$ **(Жауабы: 1,87.)**

2.27. $\int\limits_{1}^{e} x\ln x\,dx.$ **(Жауабы: 2,10.)**

2.28. $\int\limits_{-1}^{0} (x+1)e^{-2x}\,dx.$ **(Жауабы: 1,10.)**

2.29. $\int\limits_{0}^{\pi/4} x\,\mathrm{tg}^2 x\,dx.$ **(Жауабы: 0,13.)**

2.30. $\int\limits_{0}^{1} x\,\mathrm{arctg}\,x\,dx.$ **(Жауабы: 0,29.)**

3.

3.1. $\int\limits_{0}^{1} \frac{3x^4+3x^2+1}{x^2+1}\,dx.$ **(Жауабы: 1,79.)**

3.2. $\int\limits_{2}^{3} \frac{2x^4-5x^2+3}{x^2-1}\,dx.$ **(Жауабы: 9,67.)**

3.3. $\int\limits_{2}^{3} \frac{x+2}{x^2(x-1)}\,dx.$ **(Жауабы: 0,53.)**

3.4. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{x^2(x-1)}.$ **(Жауабы: 0,12.)**

3.5. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{y^5dy}{y+2}.$ **(Жауабы: - 0,09.)**

3.6. $\int_{2}^{3}\frac{3x^{2}+2x-3}{x^{3}-x}dx.$ **(Жауабы: 1,62.)**

3.7. $\int_{1/3}^{1/2}\frac{xdx}{(x-1)^{3}}.$ **(Жауабы: - 0,375.)**

3.8. $\int_{4}^{5}\frac{dx}{(x-1)(x+2)}.$ **(Жауабы: 0,04.)**

3.9. $\int_{3}^{4}\frac{dx}{(x+1)(x-2)}.$ **(Жауабы: 0,16.)**

3.10. $\int_{0}^{1}\frac{2x+3}{(x-2)^{3}}dx.$ **(Жауабы: - 1,63.)**

3.11. $\int_{2}^{3}\frac{dx}{(x-1)^{2}(x+1)}.$ **(Жауабы: 0,15.)**

3.12. $\int_{3}^{5}\frac{x^{2}+2}{(x+1)^{2}(x-1)}dx.$ **(Жауабы: 0,50.)**

3.13. $\int_{0}^{1}\frac{x^{4}+3x^{3}-1}{(x+1)^{2}}dx.$ **(Жауабы: - 0,20.)**

3.14. $\int_{-1}^{0}\frac{x^{5}-2x^{2}+3}{(x-2)^{2}}dx.$ **(Жауабы: 9,38.)**

3.15. $\int_{0}^{1}\frac{xdx}{x^{2}+3x+2}.$ **(Жауабы: 0,12.)**

3.16. $\int_{8}^{10}\frac{x^{2}+3}{x^{3}-x^{2}-6x}dx.$ **(Жауабы: 0,29.)**

3.17. $\int_{1}^{\sqrt{3}}\frac{dx}{x^{4}+x^{2}}.$ **(Жауабы: 0,16.)**

3.18. $\int_{2}^{3} \frac{x^7 dx}{1-x^4}$. **(Жауабы: - 16,67.)**

3.19. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{x^4-1}$. **(Жауабы: 0,02.)**

3.20. $\int_{-1}^{0} \frac{xdx}{x^3-1}$. **(Жауабы: 0,37.)**

3.21. $\int_{2}^{3} \frac{2x^2+4}{x^3-x^2-x+1} dx.$ **(Жауабы: 2,27.)**

3.22. $\int_{4}^{5} \frac{dx}{x^2(x-1)}$. **(Жауабы: 0,01.)**

3.23. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{(x+1)(x^2+4)}$. **(Жауабы: 0,23.)**

3.24. $\int_{7}^{9} \frac{x^2-x+2}{x^4-5x^2+4} dx.$ **(Жауабы: 0,04.)**

3.25. $\int_{0}^{\sqrt{3}} \frac{xdx}{x^3-6x^2+x-6}$. **(Жауабы: 0,14.)**

3.26. $\int_{1}^{2} \frac{dx}{x^3+1}$. **(Жауабы: 0,25.)**

3.27. $\int_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^5+1}{x^6+x^4} dx$. **(Жауабы: 1,44.)**

3.28. $\int_{2}^{3} \frac{x^3+x^2+2}{x(x^2-1)^2} dx.$ **(Жауабы: - 0,12.)**

3.29. $\int_{3}^{5} \frac{x^3-2x^2+4}{x^3(x-2)^2} dx.$ **(Жауабы: 0,35.)**

3.30. $\int\limits_{0}^{1/\sqrt{3}} \frac{x^2dx}{x^4-1}$. **(Жауабы: - 0,08.)**

4.

4.1. $\int\limits_{0}^{2} x^2\sqrt{4-x^2}dx.$ **(Жауабы: 3,14.)**

4.2. $\int\limits_{\sqrt{2}}^{1} \frac{\sqrt{4-x^2}}{x^2}dx.$ **(Жауабы: - 0,47.)**

4.3. $\int\limits_{3}^{6} \frac{\sqrt{x^2-9}}{x^4}dx.$ **(Жауабы: 0,02.)**

4.4. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{4-x^2}dx.$ **(Жауабы: 1,91.)**

4.5. $\int\limits_{1}^{\sqrt{3}} \frac{x^3+1}{x^2\sqrt{4-x^2}}dx$. **(Жауабы: 1,02.)**

4.6. $\int\limits_{0}^{\sqrt{3}} \sqrt{3-x^2}\ dx$. **(Жауабы: 2,36.)**

4.7. $\int\limits_{-3}^{3} x^2\sqrt{9-x^2}\ dx$. **(Жауабы: 31,79.)**

4.8. $\int\limits_{\sqrt{2}/2}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{x^6}dx.$ **(Жауабы: 0,53.)**

4.9. $\int\limits_{0}^{1} \sqrt{\left(1-x^2\right)^3}dx.$ **(Жауабы: 0,59.)**

4.10. $\int\limits_{\sqrt{3}/3}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{\left(1+x^2\right)^3}}$. **(Жауабы: - 0,62.)**

4.11. $\int_{1}^{2} \frac{\sqrt{x^2-1}}{x} dx.$ **(Жауабы: 0,68.)**

4.12. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{\left(x^2+3\right)^{\frac{3}{2}}}.$ **(Жауабы: 0,17.)**

4.13. $\int_{1}^{\sqrt{2}} \sqrt{2-x^2} dx.$ **(Жауабы: 1,29.)**

4.14. $\int_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{\left(x^2+1\right)^2}.$ **(Жауабы: 0,14.)**

4.15. $\int_{2\sqrt{3}}^{6} \frac{dx}{x^2\sqrt{x^2-9}}.$ **(Жауабы: 0,04.)**

4.16. $\int_{1\sqrt{3}}^{1} \frac{dx}{x^2\sqrt{1+x^2}}.$ **(Жауабы: 0,59.)**

4.17. $\int_{1/2}^{\sqrt{3}/2} \sqrt{1-x^2} dx.$ **(Жауабы: 0,26.)**

4.18. $\int_{0}^{3} \frac{dx}{\left(9+x^2\right)\sqrt{9+x^2}}.$ **(Жауабы: 0,08.)**

4.19. $\int_{2}^{4} \frac{\sqrt{x^2-4}}{x} dx.$ **(Жауабы: 0,68.)**

4.20. $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{\left(1-x^2\right)\sqrt{1-x^2}}.$ **(Жауабы: 1,16.)**

4.21. $\int_{0}^{\sqrt{2,5}} \frac{dx}{\left(5-x^2\right)^3}.$ **(Жауабы: 0,20.)**

4.22. $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{x^4 dx}{\sqrt{\left(1-x^2\right)^3}}$. **(Жауабы: - 0,20.)**

4.23. $\int\limits_{\sqrt{3}}^{2} \frac{dx}{x^4\sqrt{x^2-3}}$. **(Жауабы: 0,05.)**

4.24. $\int\limits_{2}^{4} \frac{\sqrt{16-x^2}}{x^4} dx$. **(Жауабы: 0,11.)**

4.25. $\int\limits_{0}^{\sqrt{7/3}} x^3\sqrt{7+x^2}\, dx$. **(Жауабы: – 502,09.)**

4.26. $\int\limits_{4\sqrt{2/3}}^{\sqrt{8}} \frac{\sqrt{x^2-8}}{x^4} dx$. **(Жауабы: 0,01.)**

4.27. $\int\limits_{1}^{\sqrt{2}} \frac{dx}{x^5\sqrt{x^2-1}}$. **(Жауабы: 0,29.)**

4.28. $\int\limits_{0}^{3} x^4\sqrt{9-x^2}\, dx$. **(Жауабы: 71,53.)**

4.29. $\int\limits_{0}^{3} \frac{x^3 dx}{\sqrt{9+x^2}}$. **(Жауабы: 5,31.)**

4.30. $\int\limits_{0}^{\sqrt{6}} \sqrt{6-x^2}\, dx$. **(Жауабы: 4,71.)**

5.

5.1. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi/4} \frac{\cos^3 x}{\sqrt{\sin x}} dx.$ **(Жауабы: - 0,09.)**

5.2. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{dx}{2+\cos x}.$ **(Жауабы: 0,60.)**

5.3. $\int\limits_{0}^{\pi/4} \sin^3 2x\, dx.$ **(Жауабы: 0,33.)**

5.4. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx.$ **(Жауабы: 1,18.)**

5.5. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \cos^3 x \sin 2x\, dx.$ **(Жауабы: 0,39.)**

5.6. $\int\limits_{0}^{\pi/3} \mathrm{tg}^2\, x\, dx.$ **(Жауабы: 0,68.)**

5.7. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \frac{\sin x}{(1-\cos x)^3} dx.$ **(Жауабы: 0,38.)**

5.8. $\int\limits_{0}^{\pi/4} 2\cos x \sin 3x\, dx.$ **(Жауабы: 1,00.)**

5.9. $\int\limits_{0}^{\pi} \cos\frac{x}{2} \cos\frac{x}{3} dx.$ **(Жауабы: 1,80.)**

5.10. $\int\limits_{0}^{\pi/32} \left(32\cos^2 4x - 16\right) dx.$ **(Жауабы: 1,41.)**

5.11. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{\cos x}{\sin^2 x + 1} dx.$ **(Жауабы: 0,785.)**

5.12. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi/3} \mathrm{tg}^4\, \varphi\, d\varphi.$ **(Жауабы: 0,93.)**

5.13. $\int_0^{\pi} \cos\frac{x}{2}\cos\frac{3x}{2}\,dx.$ **(Жауабы: 0.)**

5.14. $\int_0^{\pi/4} \sin 3x \cos 5x\,dx.$ **(Жауабы: - 0,25.)**

5.15. $\int_0^{\pi/3} \frac{\sin^3 x}{\cos^4 x}\,dx.$ **(Жауабы: 1,33.)**

5.16. $\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{\cos x}.$ **(Жауабы: 0,55.)**

5.17. $\int_{\pi/6}^{\pi/2} \operatorname{ctg}^3 x\,dx.$ **(Жауабы: 0,81.)**

5.18. $\int_0^{\pi/2} \cos x \cos 3x \cos 5x\,dx.$ **(Жауабы: 0,16.)**

5.19. $\int_0^{\pi} \cos^4 x \sin^2 x\,dx.$ **(Жауабы: 0,20.)**

5.20. $\int_0^{\pi/2} \sin^6 x\,dx.$ **(Жауабы: 0,49.)**

5.21. $\int_{\pi/2}^{\pi} \sqrt{1+\sin x}\,dx.$ **(Жауабы: 2,00.)**

5.22. $\int_{\pi/6}^{\pi/4} \frac{1+\operatorname{tg} x}{\sin 2x}\,dx.$ **(Жауабы: 0,38.)**

5.23. $\int_{\pi/6}^{\pi/3} \frac{\sin 2x}{\cos^3 x}\,dx.$ **(Жауабы: 1,69.)**

5.24. $\int_0^{\pi/8} \sin x \sin 3x\,dx.$ **(Жауабы: 0,05.)**

5.25. $\int\limits_{\pi/4}^{\pi} \sin x \sin 2x \sin 3x\, dx.$ **(Жауабы: - 0,21.)**

5.26. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin x}.$ **(Жауабы: 0,55.)**

5.27. $\int\limits_{0}^{\pi/2} \cos^5 x\, dx.$ **(Жауабы: 0,53.)**

5.28. $\int\limits_{\pi/2}^{\pi} \cos^2 x \sin^4 x\, dx.$ **(Жауабы: 0,10.)**

5.29. $\int\limits_{\pi/3}^{\pi/2} \frac{dx}{\sin^3 x}.$ **(Жауабы: 0,60.)**

5.30. $\int\limits_{0}^{\pi} \sin^4 \frac{x}{2} dx.$ **(Жауабы: 1,18.)**

6.

6.1. $\int\limits_{2}^{3} \frac{dx}{2x^2 + 3x - 2}.$ **(Жауабы: 0,06.)**

6.2. $\int\limits_{-2}^{0} \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 2x + 4}}.$ **(Жауабы: 1,10.)**

6.3. $\int\limits_{-5}^{-2} \frac{dx}{x^2 + 4x - 21}.$ **(Жауабы: - 0,14.)**

6.4. $\int\limits_{1}^{\sqrt{5}} \frac{x^2 dx}{13 - 6x^3 + x^6}.$ **(Жауабы: 0,26.)**

6.5. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x^2 + x}.$ **(Жауабы: 0,29.)**

6.6. $\int\limits_{-1/2}^{1/2} \frac{dx}{4x^2 + 4x + 5}.$ **(Жауабы: 0,20.)**

6.7. $\int\limits_{-1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{8+2x-x^2}}.$ **(Жауабы: 0,52.)**

6.8. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dt}{t^2+5t+4}.$ **(Жауабы: 0,07.)**

6.9. $\int\limits_{0}^{2} \frac{xdx}{x^2+3x+2}.$ **(Жауабы: 0,28.)**

6.10. $\int\limits_{1}^{2} \frac{x-5}{x^2-2x+2}.$ **(Жауабы: -2,79.)**

6.11. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+5}.$ **(Жауабы: 0,39.)**

6.12. $\int\limits_{6}^{8} \frac{dx}{x^2+2x}.$ **(Жауабы: 0,03.)**

6.13. $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}}.$ **(Жауабы: 1,57.)**

6.14. $\int\limits_{-1/2}^{0} \frac{2x-8}{\sqrt{1-x-x^2}}dx.$ **(Жауабы: 3,99.)**

6.15. $\int\limits_{3/4}^{2} \frac{dx}{\sqrt{2+3x-2x^2}}.$ **(Жауабы: 1,11.)**

6.16. $\int\limits_{1/6}^{2} \frac{dx}{3x^2-x+1}.$ **(Жауабы: 0,77.)**

6.17. $\int\limits_{3}^{4} \frac{x^2dx}{x^2-6x+10}.$ **(Жауабы: 9,35.)**

6.18. $\int\limits_{3,5}^{5} \frac{xdx}{x^2-7x+13}.$ **(Жауабы: 4,94.)**

6.19. $\int_{2}^{3} \frac{3x-2}{x^2-4x+5}dx.$ **(Жауабы: 3,19.)**

6.20. $\int_{-3/2}^{2} \frac{(x-1)^2}{x^2+3x+4}dx.$ **(Жауабы: 2,41.)**

6.21. $\int_{4}^{5} \frac{xdx}{x^4-4x^2+3}.$ **(Жауабы: 0,02.)**

6.22. $\int_{-1/2}^{1} \frac{x^3dx}{x^2+x+1}.$ **(Жауабы: 0,08.)**

6.23. $\int_{7}^{10} \frac{x^3dx}{x^2-3x+2}.$ **(Жауабы: 38,67.)**

6.24. $\int_{3}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{8x-x^2-15}}.$ **(Жауабы: 51,81.)**

6.25. $\int_{0}^{1} \frac{dx}{x^2+4x+5}.$ **(Жауабы: 0,14.)**

6.26. $\int_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt{2-6x-9x^2}}.$ **(Жауабы: 0,21.)**

6.27. $\int_{4}^{7} \frac{dx}{x^2+3x-10}.$ **(Жауабы: 0,09.)**

6.28. $\int_{1/3}^{4/3} \frac{dx}{\sqrt{8+6x-9x^2}}.$ **(Жауабы: 0,52.)**

6.29. $\int_{2}^{3} \frac{dx}{\sqrt{4x-3-x^2}}.$ **(Жауабы: 1,57.)**

6.30. $\int_{-1}^{1} \frac{dx}{x^2+2x+3}.$ **(Жауабы: 0,61.)**

7.

7.1. $\int_{3}^{29} \frac{\sqrt[3]{(x-2)^2}}{3+\sqrt[3]{(x-2)^2}}\,dx.$ **(Жауабы: 16,16.)**

7.2. $\int_{0}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x\left(3+e^{-x}\right)}.$ **(Жауабы: 0,13.)**

7.3. $\int_{0}^{5} \frac{dx}{2x+\sqrt{3x+1}}.$ **(Жауабы: 0,94.)**

7.4. $\int_{3}^{8} \frac{\sqrt{x+1}+1}{\sqrt{x+1}-1}\,dx.$ **(Жауабы: 11,77.)**

7.5. $\int_{3}^{8} \frac{xdx}{\sqrt{x+1}}.$ **(Жауабы: 10,67.)**

7.6. $\int_{0}^{\ln 5} \frac{e^x\sqrt{e^x-1}}{e^x+3}\,dx.$ **(Жауабы: 0,86.)**

7.7. $\int_{\ln 2}^{2\ln 2} \frac{dx}{e^x-1}.$ **(Жауабы: 0,41.)**

7.8. $\int_{0}^{\ln 2} \sqrt{e^x-1}\,dx.$ **(Жауабы: 0,43.)**

7.9. $\int_{0}^{5} \frac{xdx}{\sqrt{x+4}}.$ **(Жауабы: 4,67.)**

7.10. $\int_{0}^{4} \frac{dx}{1+\sqrt{2x+1}}.$ **(Жауабы: 1,31.)**

7.11. $\int_{2/3}^{7/3} \frac{xdx}{\sqrt{2+3x}}.$ **(Жауабы: 0,96.)**

7.12. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{e^x-e^{-x}}.$ **(Жауабы: 0,20.)**

7.13. $\int_{0}^{1} \frac{x^2 dx}{(1+x)^4}$. **(Жауабы: 0,04.)**

7.14. $\int_{-1}^{0} \frac{dx}{1+\sqrt[3]{x+1}}$. **(Жауабы: 0,58.)**

7.15. $\int_{0}^{\ln 2} \frac{e^x dx}{e^x + e^{-x}}$. **(Жауабы: 0,20.)**

7.16. $\int_{0}^{\sqrt[3]{7}} \frac{z^2 dz}{\sqrt{9+z^3}}$. **(Жауабы: 0,67.)**

7.17. $\int_{0}^{5} \frac{x dx}{\sqrt{1+3x}}$. **(Жауабы: 4,00.)**

7.18. $\int_{0}^{2} \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{(x+1)^3}}$. **(Жауабы: 0,52.)**

7.19. $\int_{\ln 3}^{0} \frac{1-e^x}{1+e^x} dx$. **(Жауабы: 0,29.)**

7.20. $\int_{0}^{\pi/2} \frac{\cos y \, dy}{4+\sqrt{\sin y}}$. **(Жауабы: 0,22.)**

7.21. $\int_{2}^{5} \frac{x^2 dx}{(x-1)\sqrt{x-1}}$. **(Жауабы: 8,44.)**

7.22. $\int_{0}^{\ln 2} \frac{dx}{e^x \sqrt{1-e^{-2x}}}$. **(Жауабы: 1,05.)**

7.23. $\int_{1}^{e^3} \frac{dx}{x\sqrt{1+\ln x}}$. **(Жауабы: 2,00.)**

7.24. $\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{dx}{\sqrt{1+e^x}}$. **(Жауабы: 0,22.)**

7.25. $\int\limits_{e^2}^{e^3} \frac{\ln x}{x\left(1-\ln^2 x\right)}\,dx.$ **(Жауабы: - 0,49.)**

7.26. $\int\limits_{4}^{9} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}-1}\,dx.$ **(Жауабы: 8,39.)**

7.27. $\int\limits_{\sqrt{7}}^{\sqrt{26}} \frac{x^3 dx}{\left(x^2+1\right)^{\frac{2}{3}}}.$ **(Жауабы: 22,88.)**

7.28. $\int\limits_{0}^{13} \frac{x+1}{\sqrt[3]{2x+1}}\,dx.$ **(Жауабы: 38,06.)**

7.29. $\int\limits_{\ln 5}^{\ln 12} \frac{dx}{\sqrt{e^x+4}}.$ **(Жауабы: 0,26.)**

7.30. $\int\limits_{-1}^{1} \frac{xdx}{\sqrt{5-4x}}.$ **(Жауабы: 0,17.)**

8.
Жинақты меншіксіз интегралды есептеу керек

8.1. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{16x^4+1};$ **б)** $\int\limits_{0}^{1} \frac{dx}{\sqrt[3]{2-4x}}.$

8.2. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{16xdx}{16x^4-1};$ **б)** $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt{x^2-6x+9}}.$

8.3. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^3 dx}{\sqrt{16x^4+1}};$ **б)** $\int\limits_{0}^{1/3} \frac{e^3+\frac{1}{x}}{x^2}\,dx.$

8.4. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{16x^4-1}};$ **б)** $\int\limits_{1}^{3} \frac{dx}{\sqrt[3]{(3-x)^5}}.$

8.5. а) $\int\limits_{-\infty}^{0} \frac{xdx}{\sqrt{(x^2+4)^3}}$ б) $\int\limits_{1/3}^{1} \frac{\ln(3x-1)}{3x-1}dx.$

8.6. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x^2dx}{\sqrt[3]{\left(x^3+8\right)^4}};$ б) $\int\limits_{1/4}^{1} \frac{dx}{20x^2-9x+1}.$

8.7. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt[4]{\left(16+x^2\right)^5}};$ б) $\int\limits_{1/2}^{1} \frac{\ln 2\, dx}{(1-x)\ln^2(1-x)}.$

8.8. а) $\int\limits_{4}^{\infty} \frac{xdx}{\sqrt{x^2-4x+1}};$ б) $\int\limits_{0}^{2/3} \frac{\sqrt[3]{\ln(2-3x)}}{2-3x}dx.$

8.9. а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{dx}{\pi\left(x^2+4x+5\right)};$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{xdx}{1-x^4}.$

8.10. а) $\int\limits_{-1}^{\infty} \frac{xdx}{x^2+4x+5};$ б) $\int\limits_{0}^{\pi/6} \frac{\cos 3x}{\sqrt[6]{(1-\sin 3x)^5}}dx.$

8.11. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{\operatorname{arctg} 2x}{\pi\left(1+4x^2\right)}dx;$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{2xdx}{\sqrt{1-x^4}}.$

8.12. а) $\int\limits_{1/2}^{\infty} \frac{16dx}{\pi\left(4x^2+4x+5\right)};$ б) $\int\limits_{-1/3}^{0} \frac{dx}{\sqrt[3]{1+3x}}.$

8.13. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{xdx}{4x^2+4x+5};$ б) $\int\limits_{3/4}^{1} \frac{dx}{\sqrt[5]{3-4x}}.$

8.14. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{x+2}{\sqrt[3]{\left(x^2+4x+1\right)^4}}dx;$ б) $\int\limits_{0}^{\pi/2} \frac{e^{tgx}}{\cos 2x}dx.$

8.15. а) $\int\limits_{0}^{\infty} \frac{3-x^2}{x^2+4}dx;$ б) $\int\limits_{0}^{1} \frac{2e^{1-(2/\pi)\arcsin x}}{\pi\sqrt{1-x^2}}dx.$

8.16. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{\sqrt{\operatorname{arctg}2x}}{1+4x^2}\,dx;$ **б)** $\int\limits_{1}^{2}\frac{dx}{\sqrt{4x-x^2-4}}.$

8.17. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{4dx}{x\left(1+\ln^2 x\right)};$ **б)** $\int\limits_{\pi/2}^{\pi}\frac{\sin x\,dx}{\sqrt[7]{\cos^2 x}}.$

8.18. а) $\int\limits_{0}^{\infty}x\sin x\,dx;$ **б)** $\int\limits_{-3/4}^{0}\frac{dx}{\sqrt{4x+3}}.$

8.19. а) $\int\limits_{-\infty}^{-1}\frac{7dx}{\left(x^2-4x\right)\ln 5};$ **б)** $\int\limits_{1}^{2}\frac{xdx}{\sqrt{\left(x^2-1\right)^3\ln 2}}.$

8.20. а) $\int\limits_{1/3}^{\infty}\frac{\pi dx}{\left(1+9x^2\right)\operatorname{arctg}^2 3x};$ **б)** $\int\limits_{0}^{1/3}\frac{dx}{9x^2-9x+2}.$

8.21. а) $\int\limits_{2}^{\infty}\frac{dx}{\left(4+x^2\right)\sqrt{\pi\operatorname{arctg}\frac{x}{2}}};$ **б)** $\int\limits_{0}^{\pi/2}\frac{3\sin^3 x\,dx}{\sqrt{\cos x}}.$

8.22. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{\left(x^2+2x\right)\ln^3 x};$ **б)** $\int\limits_{0}^{3}\frac{\sqrt[3]{9}xdx}{\sqrt[3]{9-x^2}}.$

8.23. а) $\int\limits_{0}^{\infty}e^{-3x}x\,dx;$ **б)** $\int\limits_{0}^{1}\frac{x^4dx}{\sqrt[3]{1-x^5}}.$

8.24. а) $\int\limits_{-\infty}^{0}\left(\frac{x^2}{x^3-1}-\frac{x}{1+x^2}\right)dx;$ **б)** $\int\limits_{0}^{2}\frac{x^2dx}{\sqrt{64-x^6}}.$

8.25. а) $\int\limits_{0}^{\infty}\frac{dx}{2x^2-2x+1};$ **б)** $\int\limits_{1/2}^{1}\frac{dx}{\sqrt[9]{1-2x}}.$

8.26. а) $\int\limits_{1}^{\infty}\frac{dx}{x^2\left(x+1\right)};$ **б)** $\int\limits_{1}^{5}\frac{x^2dx}{\sqrt{31\left(x^3-1\right)}}.$

8.27. а) $\int\limits_{e^2}^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x-1)^2}$; **б)** $\int\limits_{1}^{3/2} \frac{dx}{\sqrt{3x-x^2-2}}$.

8.28. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{(6x^2-5x+1)\ln\frac{3}{4}}$; **б)** $\int\limits_{0}^{4} \frac{10xdx}{\sqrt[4]{(16-x^2)^3}}$.

8.29. а) $\int\limits_{1}^{\infty} \frac{dx}{9x^2-9x+2}$; **б)** $\int\limits_{0}^{1/4} \frac{dx}{\sqrt[3]{1-4x}}$.

8.30. а) $\int\limits_{3}^{\infty} \frac{dx}{x^2-3x+2}$; **б)** $\int\limits_{0}^{1/2} \frac{dx}{(2x-1)^2}$.

8.1-ҮТ шығару үлгісі

Анықталған интегралды үтірден кейінгі екі белгіге дейінгі дәлдікпен есептеу керек.

1. $\int\limits_{1}^{2} \frac{dx}{x(1+x^2)}$.

► Интеграл астындағы рационал бөлшекті ең қарапайым бөлшектердің қосындысына жіктейміз (6.2.3 п.), содан соң анықталған интегралдарға Ньютон-Лейбниц формуласын: $\int\limits_a^b f(x)dx = F(b)-F(a)$ қолданып есептейміз:

$$\int\limits_1^2 \frac{dx}{x(1+x^2)} = \int\limits_1^2 \left(\frac{A}{x}+\frac{Bx+C}{1+x^2}\right)dx = \left| \begin{array}{lll} 1=A(1+x^2)+(Bx+C)x, & & \\ x=0 & \left|\begin{array}{l}1=A,\\ 0=A+B,\\ 0=C,\end{array}\right. \left.\begin{array}{l} \\ \\ \\ \end{array}\right\} & \begin{array}{l}A=1,\\ B=-1,\\ C=0\end{array} \\ x^2 & & \\ x & & \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^2 \frac{dx}{x} - \int\limits_1^2 \frac{xdx}{1+x^2} = \ln|x|\Big|_1^2 - \frac{1}{2}\ln(1+x^2)\Big|_1^2 =$$

$$=\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5+\frac{1}{2}\ln 2=\frac{3}{2}\ln 2-\frac{1}{2}\ln 5=\frac{3}{2}\cdot 0,69-\frac{1}{2}\cdot 1,61=0,24.$$

◄

2. $\int\limits_1^e \ln^2 x dx.$

► Бөліктеп интегралдау әдісін (8.1.4 п., (12)-формула) екі рет қолданып табамыз:

$$\int\limits_1^e \ln^2 x dx=\left|\begin{array}{c} u=\ln^2 x,\, du=2\ln x\frac{1}{x}dx, \\ dv=dx,\, v=x \end{array}\right|=x\ln^2 x\Big|_1^e-$$

$$-2\int\limits_1^e \ln x dx=\left|\begin{array}{c} u=\ln x,\;\; du=\frac{1}{x}dx, \\ dv=dx,\;\; v=x \end{array}\right|=$$

$$=e\ln^2 e-2\left(x\ln x-x\right)\Big|_1^e=e-2e+2e-2=0,72.$$ ◄

3. $\int\limits_3^4 \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2}dx.$

► Рационал бөлшекті ең қарапайым бөлшектердің қосын-дысына жіктейміз (6.2.3 п.):

$$\int\limits_3^4 \frac{9x^2-14x+1}{x^3-2x^2-x+2}dx=\int\limits_3^4 \frac{9x^2-14x+1}{(x+1)(x-1)(x-2)}dx=$$

$$=\int\limits_3^4\left(\frac{A}{x+1}+\frac{B}{x-1}+\frac{C}{x-2}\right)dx=$$

$$= \left| \begin{array}{l} 9x^2 - 14x + 1 = A(x-1)(x-2) + \\ +B(x+1)(x-2) + C(x+1)(x-1), \\ \begin{array}{l|l} x = -1 & 24 = \quad 6A, \\ x = \quad 1 & -4 = -2B, \\ x = \quad 2 & \quad 9 = \quad 3C, \end{array} \Bigg\} \quad A = 4, B = 2, C = 3 \end{array} \right| =$$

$$= \int_3^4 \left(\frac{4}{x+1} + \frac{2}{x-1} + \frac{3}{x-2} \right) dx = \left(4\ln|x+1| + 2\ln|x-1| + 3\ln|x-2| \right) \Big|_3^4 =$$

$$= 4\ln 5 + 2\ln 3 + 3\ln 2 - 4\ln 4 - 2\ln 2 =$$

$$= \ln\left(5^4 \cdot 3^2 \cdot 2\right) - \ln 4^4 = \ln\frac{5^4 \cdot 3^2 \cdot 2}{4^4} = \ln\frac{11250}{256} = 3,78. \quad \blacktriangleleft$$

4. $\displaystyle\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}}.$

► $$\int_0^1 \frac{x^3 dx}{\sqrt{x^2+1}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{x^2+1} = t,\ x^2+1 = t^2,\ xdx = tdt, \\ t = 1, \quad x = 0,\ t = \sqrt{2}, \quad x = 1 \end{array} \right| =$$

$$= \int_1^{\sqrt{2}} \frac{\left(t^2-1\right)t}{t} dt = \int_1^{\sqrt{2}} \left(t^2-1\right) dt = \left(\frac{1}{3}t^3 - t \right) \Bigg|_1^{\sqrt{2}} = 0,20.$$

◄

5. $\displaystyle\int_0^{\pi/4} \frac{dx}{4 - 3\cos^2 x + 5\sin^2 x}.$

► Интеграл астында $\sin x$ пен $\cos x$-ке қатысты жұп рационал функция тұрғандықтан, $t=\operatorname{tg}x$ алмастыруын пайда-ланамыз (§ 7.3):

$$\int_0^{\pi/4}\frac{dx}{4-3\cos^2 x+5\sin^2 x}=$$

$$=\left|\begin{array}{c} t=\operatorname{tg}x,\ dx=\dfrac{dt}{1+t^2},\ \cos^2 x=\dfrac{1}{1+t^2},\sin^2 x=\dfrac{t^2}{1+t^2}, \\ t=0,\quad x=0,\ t=1,\quad x=\dfrac{\pi}{4} \end{array}\right|=$$

$$=\int_0^1\frac{dt}{\left(1+t^2\right)\left(4-\dfrac{3}{1+t^2}+\dfrac{5t^2}{1+t^2}\right)}=\int_0^1\frac{dt}{9t^2+1}=\frac{1}{3}\operatorname{arctg}3t\Big|_0^1=$$

$$=\frac{1}{3}\left(\operatorname{arctg}3-\operatorname{arctg}0\right)=0,42. \qquad ◄$$

$$\textbf{6.}\quad \int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x-11}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx.$$

► Мұнда 7.2.1 п. б) $k=1$ үшін қарастырылған мысалдағы әдіс қолданылады (сол пункттегі ескертуді қараңыз):

$$\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{2x-11}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx=-\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{-2x-2}{\sqrt{3-2x-x^2}}dx-13\int_0^{\frac{1}{2}}\frac{dx}{\sqrt{4-\left(x+1\right)^2}}=$$

$$=-2\sqrt{3-2x-x^2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}-13\arcsin\frac{x+1}{2}\Big|_0^{\frac{1}{2}}=0,82-11,04+\frac{13}{6}\pi\approx-3,42.$$

◄

$$\mathbf{7.}\qquad \int\limits_{\frac{2}{3}}^{\frac{10}{3}} \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}}.$$

► Мұнда $\sqrt{3x-1}=t$ алмастыруын қолдануға болады:

$$\int\limits_{\frac{2}{3}}^{\frac{10}{3}} \frac{xdx}{(3x-1)\sqrt{3x-1}} = \left| \begin{array}{c} \sqrt{3x-1}=t,\ 3x-1=t^2,\ x=\frac{1}{3}\left(t^2+1\right),\ dx=\frac{2}{3}tdt, \\ t=1, \quad x=\frac{2}{3},\ t=3, \quad x=\frac{10}{3} \end{array} \right| =$$

$$= \int\limits_1^3 \frac{\frac{1}{3}\left(t^2+1\right)\cdot\frac{2}{3}tdt}{t^2 t} = \frac{2}{9}\int\limits_1^3 \frac{t^3+t}{t^3}dt = \frac{2}{9}\left(t-\frac{1}{t}\right)\Bigg|_1^3 \approx 0,59. \quad ◄$$

8. Меншіксіз интегралдарды есептеу керек немесе олардың жинақсыздығын дәлелдеу керек:

$$\text{а)}\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9}; \qquad\qquad \text{б)}\ \int\limits_{-1}^{1} \frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}\,dx.$$

► Меншіксіз интегралды ерекшелігі жалғыз нүктеде болатын меншіксіз интегралдардың қосындысына келтіреміз (8.2.3 п., анықтаманы және 10, 11 – мысалдарды қараңыз) және есептейміз:

$$\text{а)}\ \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} = \int\limits_{-\infty}^{0} \frac{dx}{x^2+4x+9} + \int\limits_{0}^{\infty} \frac{dx}{x^2+4x+9} =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\int\limits_{\alpha}^{0} \frac{dx}{(x+2)^2+5} + \lim_{\beta\to\infty}\int\limits_{0}^{\beta} \frac{dx}{(x+2)^2+5} =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Bigg|_{\alpha}^{0} + \lim_{\beta\to\infty} \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{x+2}{\sqrt{5}}\Bigg|_{0}^{\beta} =$$

$$= \lim_{\alpha\to-\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\alpha+2}{\sqrt{5}} \right) +$$

$$+\lim_{\beta\to\infty}\left(\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{\beta+2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}\right)=$$

$$=\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}-\frac{1}{\sqrt{5}}\left(-\frac{\pi}{2}\right)+\frac{1}{\sqrt{5}}\frac{\pi}{2}-\frac{1}{\sqrt{5}}\operatorname{arctg}\frac{2}{\sqrt{5}}=\frac{\pi}{\sqrt{5}};$$

б) $$\int_{-1}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=\int_{-1}^{0}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx+\int_{0}^{1}\frac{3x^2+2}{\sqrt[3]{x^2}}dx=$$

$$=\lim_{\beta\to 0-}\int_{-1}^{\beta}\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx+\lim_{\alpha\to 0+}\int_{\alpha}^{0}\left(3x^{\frac{4}{3}}+2x^{-\frac{2}{3}}\right)dx=$$

$$=\lim_{\beta\to 0-}\left(\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_{-1}^{\beta}+\lim_{\alpha\to 0+}\left(\frac{9}{7}x^{\frac{7}{3}}+6x^{\frac{1}{3}}\right)\Bigg|_{\alpha}^{1}=$$

$$=\lim_{\beta\to 0-}\left(\frac{9}{7}\beta^{\frac{7}{3}}+6\beta^{\frac{1}{3}}+\frac{9}{7}+6\right)+\lim_{\alpha\to 0+}\left(\frac{9}{7}+6-\frac{9}{7}\alpha^{\frac{7}{3}}-6\alpha^{\frac{1}{3}}\right)=14\frac{4}{7}.\quad ◀$$

8.2-ҮТ

1. Берілген сызықтармен шенелген фигура ауданын (үтірден кейінгі екі мәнге дейінгі дәлдікпен) есептеңіз

1.1. $\rho=3\sqrt{\cos 2\varphi}.$ **(Жауабы:** 9,00.**)**

1.2. $y=x^2, y=3-2x.$ **(Жауабы:** 10,67.**)**

1.3. $y=\sqrt{x}, y=x^3.$ **(Жауабы:** 0,42.**)**

1.4. $x=7\cos^3 t, y=7\sin^3 t.$ **(Жауабы:** 57,70.**)**

1.5. $\rho=4\cos 3\varphi.$ **(Жауабы:** 12,56.**)**

1.6. $\rho=3\cos 2\varphi.$ **(Жауабы:** 14,13.**)**

1.7. $\rho=2(1-\cos\varphi).$ **(Жауабы:** 18,84.**)**

1.8. $\rho^2 = 2\sin 2\varphi.$ (**Жауабы:** 2,00.)

1.9. $x = 4(t - \sin t), y = 4(1 - \cos t).$ (**Жауабы:** 150,72.)

1.10. $\rho = 2(1 + \cos\varphi).$ (**Жауабы:** 18,84.)

1.11. $\rho = 2\sin 3\varphi.$ (**Жауабы:** 3,14.)

1.12. $\rho = 2 + \cos\varphi.$ (**Жауабы:** 14,13.)

1.13. $y = 1/\left(1 + x^2\right), \quad y = x^2/2.$ (**Жауабы:** 1,23.)

1.14. $y^2 = x + 1, \quad y^2 = 9 - x.$ (**Жауабы:** 29,87.)

1.15. $y^2 = x^3, \ x = 0, \ y = 4.$ (**Жауабы:** 6,05.)

1.16. $\rho = 4\sin^2\varphi.$ (**Жауабы:** 18,84.)

1.17. $x = 3\cos t, \ y = 2\sin t.$ (**Жауабы:** 18,84.)

1.18. $y^2 = 9x, y = 3x.$ (**Жауабы:** 0,50.)

1.19. $x = 3(\cos t + t\sin t), \quad y = 3(\sin t - t\cos t),$

$y = 0 \quad (0 \le t \le \pi).$ (**Жауабы:** 29,25.)

1.20. $y^2 = 4x, \ x^2 = 4y.$ (**Жауабы:** 5,33.)

1.21. $y^2 = x^3, \quad x = 2.$ (**Жауабы:** 4,51.)

1.22. $y = x^2, \quad y = 2 - x^2.$ (**Жауабы:** 2,67.)

1.23. $y^2 = (4 - x)^3, \quad x = 0.$ (**Жауабы:** 25,60.)

1.24. $\rho = 3\sin 4\varphi.$ (**Жауабы:** 14,13.)

1.25. $y = x^3, \ y = 1, \quad x = 0.$ (**Жауабы:** 0,75.)

1.26. $xy = 6, \quad x + y - 7 = 0.$ (**Жауабы:** 6,76.)

1.27. $y = 2^x, \ y = 2x - x^2, \ x = 0, \ x = 2.$ (**Жауабы:** 3,02.)

1.28. $x^2 = 4y, \ y = 8/\left(x^2 + 4\right).$ (**Жауабы:** 4,95.)

1.29. $y = x + 1, \ y = \cos x, \quad y = 0.$ (**Жауабы:** 1,50.)

1.30. $x = 2\cos^3 t, \quad y = 2\sin^3 t.$ **(Жауабы:** 4,71.**)**

2. Берілген сызық доғасының ұзындығын (үтірден кейінгі екі мәнге дейінгі дәлдікпен) есептеңіз

2.1. $x = 2\cos^3 t, \ y = 2\sin^3 t.$ **(Жауабы:** 12,00.**)**

2.2. $x = 2(\cos t + t\sin t), \ y = 2(\sin t - t\cos t) \quad (0 \le t \le \pi).$

(Жауабы: 9,86.**)**

2.3. $\rho = \sin^3(\varphi/3) \quad (0 \le \varphi \le \pi/2).$ **(Жауабы:** 0,14.**)**

2.4. $\rho = 2\sin^3(\varphi/3) \quad (0 \le \varphi \le \pi/2).$ **(Жауабы:** 0,27.**)**

2.5. $\sqrt[3]{x^2} + \sqrt[3]{y^2} = \sqrt[3]{9}.$ **(Жауабы:** 18,00.**)**

2.6. $x^{2/3} + y^{2/3} = 4^{2/3}.$ **(Жауабы:** 24,00.**)**

2.7. $y^2 = (x+1)^3$ сызығының $x = 4$ түзуімен қиылған бөлігі

(Жауабы: 24,81.**)**

2.8. $y = 1 - \ln\cos x \quad (0 \le x \le \pi/6).$ **(Жауабы:** 0,55.**)**

2.9. $\rho = 6\cos^3(\varphi/3) \quad (0 \le \varphi \le \pi/2).$ **(Жауабы:** 8,60.**)**

2.10. $x = 4\cos^3 t, \ y = 4\sin^3 t.$ **(Жауабы:** 24,00.**)**

2.11. $y^2 = (x-1)^3$, $A(1,0)$, $B(6,\sqrt{125}).$ **(Жауабы:** 12,41.**)**

2.12. $y^2 = x^5$ сызығының $x = 5$ түзуімен қиылған бөлігі

(Жауабы: 24,81.**)**

2.13. $\rho = 3\cos\varphi.$ **(Жауабы:** 9,42.**)**

2.14. $\rho = 3(1 - \cos\varphi).$ **(Жауабы:** 24,00.**)**

2.15. $\rho = 2\cos^3(\varphi/3).$ **(Жауабы:** 9,42.**)**

2.16. $x = 5\cos^2 t, \ y = 5\sin^2 t \ (0 \le t \le \pi/2).$ **(Жауабы:** 7,05.**)**

2.17. $9y^2 = 4(3-x)^3$ сызығының Oy өсімен қиылысу нүктелерінің арасы **(Жауабы:** 9,33.**)**

2.18. $\rho = 3\sin\varphi.$ **(Жауабы:** 9,42.**)**

2.19. $y = \ln\sin x.$ $(\pi/3 \le x \le \pi/2).$ **(Жауабы:** 0,55.**)**

2.20. $x = 9(t-\sin t),\ y = 9(1-\cos t)\ (0 \le t \le 2\pi).$ **(Жауабы:** 72,00.**)**

2.21. $\rho = 2(1-\cos\varphi).$ **(Жауабы:** 16,00.**)**

2.22. $y^2 = (x-1)^3$ сызығының $A(2,-1)$ нүктеден $B(5,-8)$ нүктеге дейінгі бөлігі **(Жауабы:** 7,63.**)**

2.23. $x = 7(t-\sin t), y = 7(1-\cos t)\ (2\pi \le t \le 4\pi).$ **(Жауабы:** 24,00.**)**

2.24. $y = e^{x/2} + e^{-x/2}$ $(0 \le x \le 2).$ **(Жауабы:** 2,35.**)**

2.25. $x = 4\cos^3 t, y = 4\sin^3 t.$ **(Жауабы:** 24,00.**)**

2.26. $x = \sqrt{3}t^2,\ y = t - t^3.$ **(Жауабы:** 4,00.**)**

2.27. $\rho = 5\sin\varphi.$ **(Жауабы:** 15,70.**)**

2.28. $\rho = 4\cos\varphi.$ **(Жауабы:** 12,56.**)**

2.29. $\rho = 5(1+\cos\varphi).$ **(Жауабы:** 40,00.**)**

2.30. $y^2 = x^3,\ \ A(0,0),\ \ B(4,8).$ **(Жауабы:** 9,07.**)**

3. Ф-фигурасының көрсетілген координат өсін айналуынан алынған дененің көлемін (үтірден кейінгі екі мәнге дейінгі дәлдікпен) есептеңіз

3.1. $\Phi: y^2 = 4 - x, x = 0, Oy.$ **(Жауабы:** 107,17.**)**

3.2. $\Phi: \sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{2},\quad x = 0,\ \ y = 0, Ox.$ **(Жауабы:** 1,68.**)**

3.3. $\Phi: x^2/9 + y^2/4 = 1, Oy.$ **(Жауабы:** 150,72.**)**

3.4. $\Phi: y^3 = x^2, y = 1, Ox.$ **(Жауабы:** 3,59.**)**

3.5. $\Phi: x = 6(t-\sin t), y = 6(1-\cos t), Ox.$ **(Жауабы:** 1064,88.**)**

3.6. $\Phi: x = 3\cos^2 t, y = 4\sin^2 t \ \left(0 \le t \le \pi/2\right), Oy.$ **(Жауабы:** 37,68.)

3.7. $\Phi: y^2 = x, x^2 = y, Ox.$ **(Жауабы:** 0,94.)

3.8. $\Phi: y^2 = \left(x-1\right)^3, x = 2, Ox.$ **(Жауабы:** 0,78.)

3.9. $\Phi: x = \sqrt{1-y^2}, y = \sqrt{\frac{3}{2}x}, y = 0, Ox.$ **(Жауабы:** 1,24.)

3.10. $\Phi: y = \sin x, y = 0, \left(0 \le x \le \pi\right), Ox.$ **(Жауабы:** 4,93.)

3.11. $\Phi: y^2 = 4x, x^2 = 4y, Ox.$ **(Жауабы:** 60,29.)

3.12. $\Phi: x = 2\cos t, y = 5\sin t, Oy.$ **(Жауабы:** 83,73.)

3.13. $\Phi: y = x^2, 8x = y^2, Oy.$ **(Жауабы:** 15,07.)

3.14. $\Phi: y = e^x, x = 0, y = 0, x = 1, Ox.$ **(Жауабы:** 10,05.)

3.15. $\Phi: y^2 = 4x/3, x = 3, Oy.$ **(Жауабы:** 90,43.)

3.16. $\Phi: y = 2x - x^2, y = 0, Ox.$ **(Жауабы:** 3,35.)

3.17. $\Phi: \rho = 2\left(1+\cos\varphi\right),$ **(Жауабы:** 66,99.)

3.18. $\Phi: x = 7\cos^3 t, y = 7\sin^3 t, Oy.$ **(Жауабы:** 328,23.)

3.19. $\Phi: x^2/16 + y^2/1 = 1, Ox.$ **(Жауабы:** 16,75.)

3.20. $\Phi: x^3 = \left(y-1\right)^2, x = 0, y = 0, Ox.$ **(Жауабы:** 6,44.)

3.21. $\Phi: xy = 4, 2x + y - 6 = 0, Ox.$ **(Жауабы:** 4,19.)

3.22. $\Phi: x = \sqrt{3}\cos t, y = 2\sin t, Oy.$ **(Жауабы:** 25,12.)

3.23. $\Phi: y = 2 - x^2, y = x^2, Ox.$ **(Жауабы:** 16,75.)

3.24. $\Phi: y = -x^2 + 8, y = x^2, Ox.$ **(Жауабы:** 535,89.)

3.25. $\Phi: y^2 = \left(x+4\right)^3, x = 0, Ox.$ **(Жауабы:** 200,96.)

3.26. $\Phi: y = x^3, x = 0, y = 8, Oy.$ **(Жауабы:** 60,29.)

3.27. $\Phi: x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, Ox.$ **(Жауабы:** 0,96.)

3.28. $\Phi: 2y = x^2, 2x + 2y - 3 = 0, Ox.$ **(Жауабы:** 57,10.**)**

3.29. $\Phi: y = x - x^2, y = 0, Ox.$ **(Жауабы:** 0,10.**)**

3.30. $\Phi: y = 2 - x^2/2, x + y = 2, Oy.$ **(Жауабы:** 4,17.**)**

4. *L*-қисық доғасының көрсетілген координат өсін айналудан алынған беттің ауданын (үтірден кейінгі екі мәнге дейінгі дәлдікпен) есептеңіз

4.1. $L: y = x^3/3 \quad (-1/2 \le x \le 1/2), Ox.$ **(Жауабы:** 4,25.**)**

4.2. $L: \rho = 2\cos\varphi,$ поляр өсі. **(Жауабы:** 12,57.**)**

4.3. $L: x = 10(t - \sin t), y = 10(1 - \cos t) \quad (0 \le t \le 2\pi), Ox.$
(Жауабы: 6698,67.**)**

4.4. $L: y = x^2/2$ сызығының $y = 3/2$ түзуімен қиылған бөлігі; $Oy.$
(Жауабы: 14,65.**)**

4.5. $L: 3y = x^3 \quad (0 \le x \le 2), Oy.$ **(Жауабы:** 24,09.**)**

4.6. $L: y = \sqrt{x}, \quad y = x, Ox.$ **(Жауабы:** 5,34.**)**

4.7. $L: x = 2(t - \sin t), y = 2(1 - \cos t) \; (0 \le t \le 2\pi), Ox.$
(Жауабы: 267,95.**)**

4.8. $L: x = \cos t, y = 3 + \sin t, Ox.$ **(Жауабы:** 118,32.**)**

4.9. $L: 3x = y^3 \quad (0 \le y \le 2), Oy.$ **(Жауабы:** 24,09.**)**

4.10. $L: y = x^3/3 \quad (-1 \le x \le 1), Ox.$ **(Жауабы:** 1,27.**)**

4.11. $L: x = \cos t, y = 1 + \sin t, Ox.$ **(Жауабы:** 32,28.**)**

4.12. $L: x^2 = 4 + y$ сызығының $y = 2$ түзуімен қиылған бөлігі; $Oy.$
(Жауабы: 64,89.**)**

4.13. $L: x = 3(t - \sin t), y = 3(1 - \cos t) \; (0 \le t \le 2\pi), Ox.$
(Жауабы: 602,88.**)**

4.14. $L: x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, Ox.$ **(Жауабы:** 7,54.**)**

4.15. $L:\rho=\sqrt{\cos 2\varphi}$, поляр өсі. **(Жауабы:** 14,82.**)**

4.16. $L: y^2=4+x$ сызығының $x=2$ түзуімен қиылған бөлігі; Ox. **(Жауабы:** 64,89.**)**

4.17. $L: y^2=2x$ сызығының $2x=3$ түзуімен қиылған бөлігі; Ox. **(Жауабы:** 16,65.**)**

4.18. $L: 3y=x^3 \quad (0\le x\le 1), Ox$. **(Жауабы:** 0,63.**)**

4.19. $L:\rho^2=4\cos 2\varphi$, поляр өсі. **(Жауабы:** 14,80.**)**

4.20. $L:\rho=6\sin\varphi$, поляр өсі. **(Жауабы:** 354,96.**)**

4.21. $L: x=t-\sin t, y=1-\cos t \quad (0\le t\le 2\pi), Ox$. **(Жауабы:** 66,99.**)**

4.22. $L:\rho=2\sin\varphi$, поляр өсі. **(Жауабы:** 39,44.**)**

4.23. $L:\rho=\dfrac{3}{2}\cos\varphi$, поляр өсі. **(Жауабы:** 7,07.**)**

4.24. $L: x=3\cos^3 t, y=3\sin^3 t, Ox$. **(Жауабы:** 67,82.**)**

4.25. $L: x=2\cos t, y=3+2\sin t, Ox$. **(Жауабы:** 236,64.**)**

4.26. $L:\rho^2=9\cos 2\varphi$, поляр өсі **.** **(Жауабы:** $2\cdot 16{,}38$.**)**

4.27. $L: y=x^3$ сызығының $x=\pm 2/3$ түзулерінің арасындағы бөлігі; Ox. **(Жауабы:** 0,84.**)**

4.28. $L: x=2\cos^3 t, y=2\sin^3 t, \quad Ox$. **(Жауабы:** 30,14.**)**

4.29. $L: x=\cos t, y=2+\sin t, Ox$. **(Жауабы:** 77,88.**)**

4.30. $L:\rho=4\sin\varphi$, поляр өсі. **(Жауабы:** 157,76.**)**

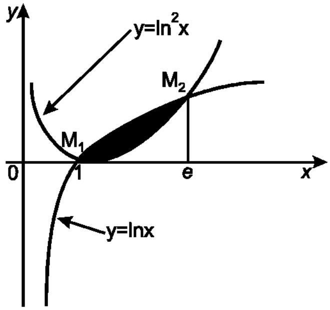
8.2-ҮТ шығару үлгісі

1. $y=\ln x$ және $y=\ln^2 x$ сызықтарымен шенелген фигураның (81-сурет) ауданын үтірден кейінгі екі мәнге дейінгі дәлдікпен табу керек.

► Қисықтардың қиылысу нүктелерін табамыз:

$$\begin{cases} y = \ln x, \\ y = \ln^2 x, \end{cases} \qquad \ln x = \ln^2 x, \qquad \ln x(\ln x - 1) = 0,$$

$$\left[\begin{array}{l} \ln x = 0, \\ \ln x - 1 = 0, \end{array}\right. \quad x_1 = 1,\ y_1 = \ln 1 = 0, \quad x_2 = e; \quad y_2 = \ln e = 1;$$



81-сурет

Сонымен қиылысу нүктелері: $M_1(1,0)$, $M_2(e,1)$. Енді 7.3.2 п., (3)-формуланы пайдаланып табамыз:

$$S = \int_1^e \left(\ln x - \ln^2 x\right) dx,$$

$$\int \ln^2 x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln^2 x, du = 2\ln x \dfrac{1}{x} dx, \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x\ln^2 x - 2\int \ln x dx,$$

$$\int \ln x dx = \left| \begin{array}{l} u = \ln x, du = \dfrac{1}{x} dx, \\ dv = dx, v = x \end{array} \right| = x\ln x - \int dx = x\ln x - x + C.$$

$$S = \int_1^e \ln x dx - \int_1^e \ln^2 x dx = \left(x\ln x - x\right)\Big|_1^e - \left(x\ln^2 x - 2x\ln x + 2x\right)\Big|_1^e =$$

$$= e\ln e - e + 1 - \left(e\ln^2 e - 2e\ln e + 2e\right) + 2 = 3 - e \approx 0,28. \quad ◄$$

2. Берілген сызықтың ұзындығын үтірден кейінгі екі мәнге дейінгі дәлдікпен есептеу керек:

$$x=\left(t^2-2\right)\sin t+2t\cos t,\quad y=\left(2-t^2\right)\cos t+2t\sin t\quad \left(0\le t\le \pi\right)$$

► 8.3.1п., (7') формуласын $\varphi'(t)=\dfrac{dx}{dt}$, $\psi'(t)=\dfrac{dy}{dt}$, $a=t_1$, $b=t_2$ арқылы белгілеп алып пайдаланамыз:

$$l=\int_{t_1}^{t_2}\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}dt.$$

$$\frac{dx}{dt}=2t\sin t+\left(t^2-2\right)\cos t+2\cos t-2t\sin t=t^2\cos t,$$

$$\frac{dy}{dt}=-2t\cos t-\left(2-t^2\right)\sin t+2\sin t+2t\cos t=t^2\sin t,$$

$$\sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\right)^2}=\sqrt{t^4\cos^2 t+t^4\sin^2 t}=t^2.$$

$$l=\int_0^{\pi}t^2dt=\frac{t^3}{3}\Big|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{3}\approx 10,32. \qquad ◄$$

3. $y=3-x^2$ және $y=x^2+1$ параболаларымен шенелген жазық фигураның абсцисса өсін айналуынан шыққан дененің көлемін үтірден кейін екі мәнге дейінгі дәлдікпен табу керек.

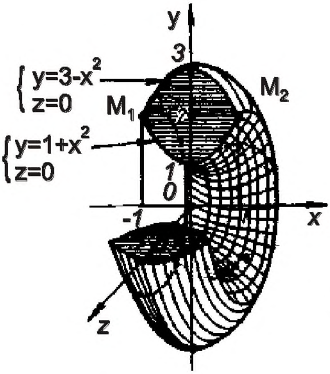
► Параболалардың қиылысу нүктелерін табамыз: $M_1(-1,2)$, $M_2(1,2)$. Берілген дененің көлемін V_1 және V_2 көлемдерінің айырымы ретінде аламыз. Ал V_1 және V_2 көлемдері 8.3.3 п., (6) формула бойынша табамыз:

$$V_2=\pi\int_{-1}^{1}\left(3-x^2\right)dx,\qquad V_2=\pi\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)dx.$$

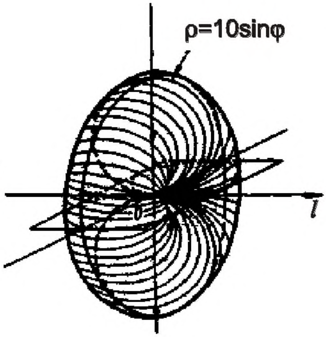
Сонымен (82-сурет);

$$V = V_2 - V_1 = \pi\int_{-1}^{1}\left(3-x^2\right)^2 dx - \pi\int_{-1}^{1}\left(x^2+1\right)^2 dx = \pi\int_{-1}^{1}\left(\left(3-x^2\right)^2 - \left(x^2+1\right)^2\right)dx =$$

$$= \pi\int_{-1}^{1}\left(8-8x^2\right)dx = 8\pi\left(x-\frac{x^3}{3}\right)\Bigg|_{-1}^{1} = 16\pi\left(1-\frac{1}{3}\right) \approx 33,50.$$



82-сурет



83-сурет

4. $\rho = 10\sin\varphi$ шеңберінің Ol полярлық өсті айналуынан алынған беттің ауданын (үтірден кейінгі екі мәнге дейінгі дәлдікпен) есептеу керек (83-сурет).

► Полярлық координаттар жүйесінде жазылған келесі формуланы пайдаланамыз:

$$S = 2\pi\int_{\varphi_1}^{\varphi_2} y\sqrt{\rho_\varphi'^2 + \rho^2}\,d\varphi, \quad \text{мұнда } y = \rho\sin\varphi.$$

Есептейміз:

$$\rho_\varphi' = 10\cos\varphi, \quad y = \rho\sin\varphi = 10\sin^2\varphi, \quad \varphi_1 = 0, \quad \varphi_2 = \pi,$$

$$S = 2\pi\int_0^\pi 10\sin^2\varphi\sqrt{100\cos^2\varphi + 100\sin^2\varphi}\,d\varphi = 200\pi\int_0^\pi \sin^2\varphi\,d\varphi =$$

$$= 200\pi\int_0^{\pi}\frac{1-\cos 2\varphi}{2}d\varphi = 100\pi\left(\varphi - \tfrac{1}{2}\sin 2\varphi\right)\Big|_0^{\pi} \approx 985{,}96.$$

8.3-ҮТ

1. P резервуарынан суды сорып шығаруға кететін жұмысты есептеу керек. Судың меншікті салмағы $9{,}81\,\frac{кН}{м^3}$, $\pi = 3{,}14$. (Нәтижені бүтін бөлікке дейін дөңгелектеу керек).

1.1 P: табан қабырғасы 2 м және биіктігі 5 м дұрыс төртбұрышты пирамида.

(**Жауабы:** 254 кДж.)

1.2. P: төбесі төмен қараған дұрыс төртбұрышты пирамида. Пирамиданың табан қабырғасы 2 м, биіктігі 6 м.

(**Жауабы**: 118 кДж.)

1.3. P: биіктігі 1,5 м және радиусы 1 м сфералық сегмент формасындағы қазан.

(**Жауабы:** 22 кДж.)

1.4. P: табан радиусы 1 м, ұзындығы 5 м жартылай цилиндр.

(**Жауабы:** 33 кДж.)

1.5. P: жоғарғы табан радиусы 1 м, төменгі табан радиусы 2 м, биіктігі 3 м қиық конус.

(**Жауабы:** 393 кДж.)

1.6. P: перпендикуляр қимасы парабола болатын (желоб) қауа. Оның ұзындығы 5 м, ені 4 м, тереңдігі 4 м.

(**Жауабы:** 837 кДж.)

1.7. P: табан радиусы 1 м, ұзындығы 5м, цилиндрлік цистерна.

(**Жауабы:**154 кДж.)

1.8. P: табаны 2 м және биіктігі 5 м дұрыс үшбұрышты пирамида.

(**Жауабы:** 106 кДж.)

1.9. P: төбесі төмен қараған, табан қабырғасы 4 м, биіктігі 6 м дұрыс үшбұрышты дұрыс пирамида.

(**Жауабы:** 204 кДж.)

1.10. *P*: төбесі төмен қараған табан радиусы 3 м, биіктігі 5 м конус.

(Жауабы: 578 кДж.)

1.11. *P*: жоғарғы табан радиусы 3 м, төменгі табан радиусы 1 м, биіктігі 3 м қиық конус.

(Жауабы: 416 кДж.)

1.12. *P*: табан радиусы 2 м және биіктігі 5 м конус.

(Жауабы: 770 кДж.)

1.13. *P*: жоғарғы табан қабырғасы 8 м, төменгі табан қабырғасы 4 м, биіктігі 2 м қиық конус.

(Жауабы: 576 кДж.)

1.14. *P*: табан радиусы 2 м, тереңдігі 4 м айналу параболоиды.

(Жауабы: 329 кДж.)

1.15. *P*: табан радиусы 1 м, тереңдігі 2 м айналу жарты эллипсоиды.

(Жауабы: 31 кДж.)

1.16. *P*: жоғарғы табан қабырғасы 2 м, төменгісі 4 м, биіктігі 1 м. дұрыс төртбұрышты пирамида.

(Жауабы: 56 кДж.)

1.17. табан қабырғасы 1 м және биіктігі 2 м дұрыс алтыбұрышты пирамида.

(Жауабы: 26 кДж.)

1.18. *P*: төбесі төмен қараған, табан қабырғасы 2 м, биіктігі 6 м, дұрыс алтыбұрышты пирамида.

(Жауабы: 306 кДж.)

1.19. *P*: табан радиусы 1 м және биіктігі 3 м цилиндр.

(Жауабы: 139 кДж.)

1.20. Жоғарғы табан қабырғасы 1 м, төменгісі 2 м, биіктігі 2 м дұрыс қиық алтыбұрышты пирамида.

(Жауабы: 144 кДж.)

1.21. *P*: перпендикуляр қимасында радиусы 1 м тең жарты шеңбер болатын (желоб) қауа. Оның ұзындығы 10 м.

(Жауабы: 65 кДж.)

1.22. *P*: жоғары табан қабырғасы 2 м, төменгісі 1 м, биіктігі 2 м дұрыс қиық алтыбұрышты пирамида.

(Жауабы: 93 кДж.)

1.23. P: радиусы 2 м жарты сфера.

(Жауабы: 123 кДж.)

Келесі есептерде ауырлық салмағы γ тең қандайда бір материалдан құралатын Q құрылысты салу кезіндегі ауырлық салмақты тоқтатуға жұмсалатын жұмысты есептеу керек (нәтижені бүтін бөлікке дейін дөңгелектеу керек).

1.24. Q: жоғарғы табан қабырғасы 2 м, төменгісі 4 м, биіктігі 2 м дұрыс қиық төртбұрышты пирамида; $\gamma = 24\,\dfrac{кН}{м^3}$.

(Жауабы: 352 кДж.)

1.25. Q: табан қабырғасы 1 м және биіктігі 2 м дұрыс алтыбұрышты пирамида; $\gamma = 24\,\dfrac{кН}{м^3}$.

(Жауабы: 21 кДж.)

1.26. Q: табан қабырғасы 2 м, биіктігі 4 м дұрыс төртбұрышты пирамида; $\gamma = 24\,\dfrac{кН}{м^3}$.

(Жауабы: 128 кДж.)

1.27. Q: жоғарғы табан қабырғасы 1 м, төменгісі 2 м, биіктігі 2 м дұрыс алтыбұрышты дұрыс пирамида; $\gamma = 24\,\dfrac{кН}{м^3}$.

(Жауабы: 229 кДж.)

1.28. Q: табан қабырғасы 3 м және биіктігі 6 м дұрыс үшбұрышты пирамида; $\gamma = 20\,\dfrac{кН}{м^3}$.

(Жауабы: 234 кДж.)

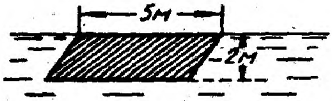
1.29. Q: табан радиусы 2 м, биіктігі 3 м конус; $\gamma = 20\,\dfrac{кН}{м^3}$.

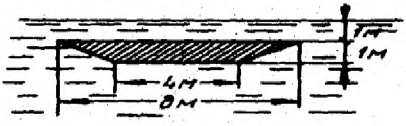
(Жауабы: 188 кДж.)

1.30. Q: жоғарғы табан радиусы 1 м, төменгісі 2 м, биіктігі 2 м қисық конус; $\gamma = 21\,\dfrac{кН}{м^3}$.

(Жауабы: 88 кДж.)

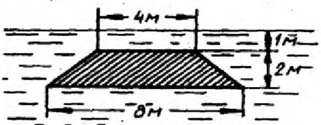
2. Суға вертикаль батырылған пластинаға түсетін судың қысым күшін есептеу керек. Судың меншікті салмағы $9{,}81\frac{кН}{м^3}$. (Нәтижені бүтін бөлікке дейін дөңгелектеу керек). Пластинаның формасы, өлшемдері және орналасуы суретте көрсетілген.

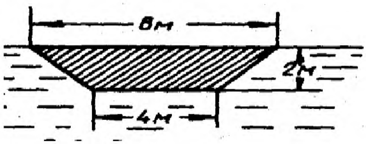




84-сурет

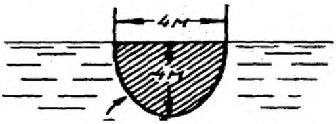
85-сурет

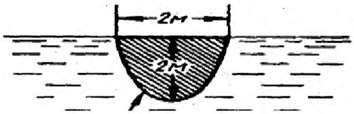




86-сурет

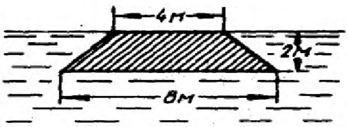
87-сурет

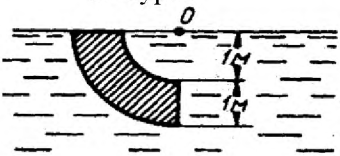




88-сурет

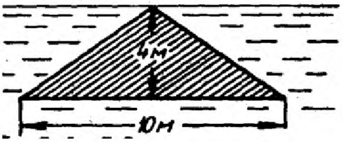
89-сурет



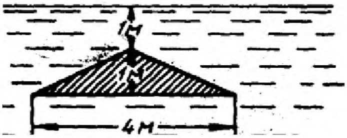


90-сурет

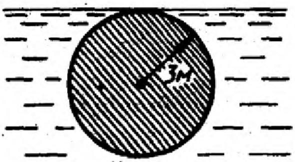
91-сурет



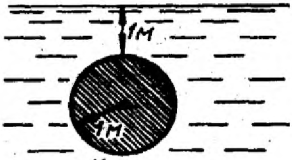
92-сурет



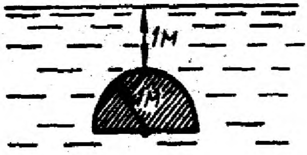
93-сурет



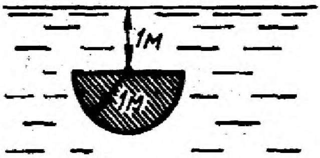
94-сурет



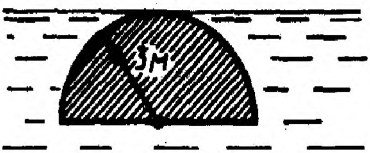
95-сурет



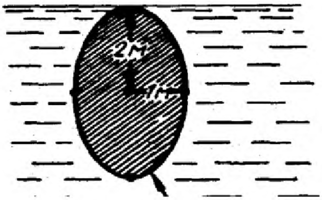
96-сурет



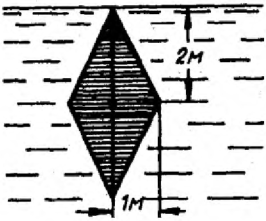
97-сурет



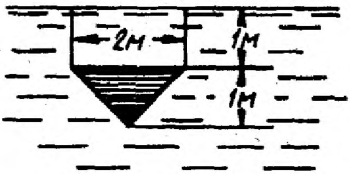
98-сурет



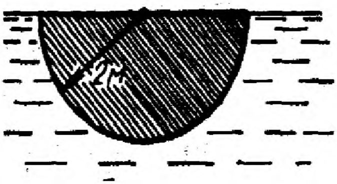
99-сурет



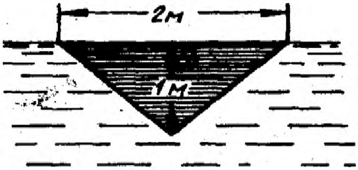
100-сурет



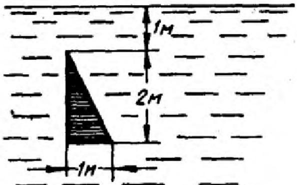
101-сурет



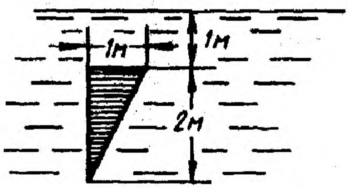
102-сурет



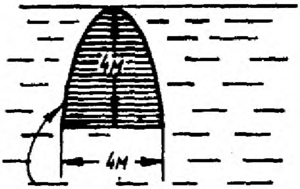
103-сурет



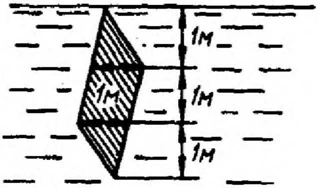
Тік бұрышты үшбұрыш
104-сурет



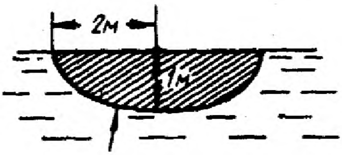
Тік бұрышты үшбұрыш
105-сурет



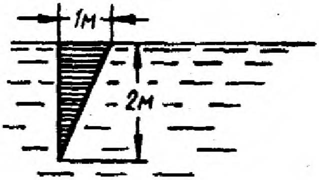
Парабола
106-сурет



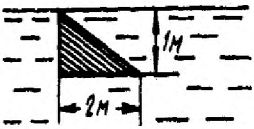
Параллелограмм
107-сурет



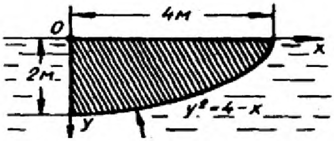
Жарты эллипс
108-сурет



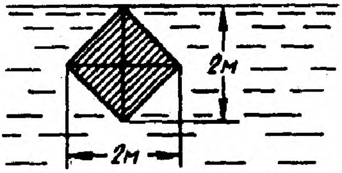
Тік бұрышты үшбұрыш
109-сурет



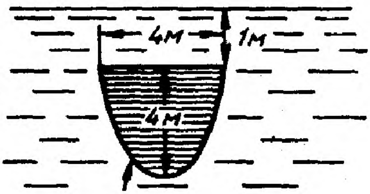
Тік бұрышты үшбұрыш
110-сурет



Парабола доғасы
111-сурет



Квадрат
112-сурет



Парабола
113-сурет

2.1. 84-сурет	(**Жауабы:** 98 кН.)
2.2. 85-сурет	(**Жауабы:** 85 кН.)
2.3. 86-сурет	(**Жауабы:** 248 кН.)
2.4. 87-сурет	(**Жауабы:** 105 кН.)
2.5. 88-сурет	(**Жауабы:** 167 кН.)
2.6. 89-сурет	(**Жауабы:** 26 кН.)
2.7. 90-сурет	(**Жауабы:** 131 кН.)
2.8.91-сурет	(**Жауабы:** 23 кН.)
2.9. 92-сурет	(**Жауабы:** 523 кН.)
2.10. 93-сурет	(**Жауабы:** 33 кН.)
2.11. 94-сурет	(**Жауабы:** 31 кН.)
2.12. 95-сурет	(**Жауабы:** 62 кН.)
2.13. 96-сурет	(**Жауабы:** 24 кН.)
2.14. 97-сурет	(**Жауабы:** 22 кН.)
2.15. 98-сурет	(**Жауабы:** 239 кН.)
2.16. 99-сурет	(**Жауабы:** 123 кН.)
2.17. 100-сурет	(**Жауабы:** 78 кН.)

2.18. 101-сурет (**Жауабы:** 13 кН.)
2.19. 102-сурет (**Жауабы:** 52 кН.)
2.20. 103-сурет (**Жауабы:** 3 кН.)
2.21. 104-сурет (**Жауабы:** 23 кН.)
2.22. 105-сурет (**Жауабы:** 16 кН.)
2.23. 106-сурет (**Жауабы:** 251 кН.)
2.24. 107-сурет (**Жауабы:** 31 кН.)
2.25. 108-сурет (**Жауабы:** 13 кН.)
2.26. 109-сурет (**Жауабы:** 6 кН.)
2.27. 110-сурет (**Жауабы:** 6 кН.)
2.28. 111-сурет (**Жауабы:** 39 кН.)
2.29. 112-сурет (**Жауабы:** 20 кН.)
2.30. 113-сурет (**Жауабы:** 272 кН.)

3. ***Келесі есептерде жазықтықтағы L біртекті қисықтың масса центрінің координаттарын табу керек.***

3.1. L: Ox өсінен жоғары орналасқан $x^2+y^2=R^2$ – жарты шеңбер. (**Жауабы:** $x_c=0,\ y_c=\frac{2R}{\pi}$).

3.2. L: $x=a(t-\sin t)$, $y=a(1-\cos t)$, $0\le t\le 2\pi$ циклоиданың бірінші аркасы. (**Жауабы:** $x_c=\pi a,\ y_c=\frac{4}{3}a$).

3.3. L: үшінші квадранттағы $x^{\frac{2}{3}}+y^{\frac{2}{3}}=a^{\frac{2}{3}}$ астроиданың доғасы. (**Жауабы:** $x_c=y_c=-0,4a$).

3.4. L: радиусы R тең шеңбердің α центрлік бұрышын керетін доға. (**Жауабы:** масса центрі центрлік бұрыштың биссектрисасында, центрден $2R\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\alpha}$ қашықтықта).

3.5. L: $y=ach(x-a)$, $-a\le x\le a$, шынжыр сызығының доғасы. (**Жауабы:** $x_c=0,\ y_c=\frac{a}{4}\cdot\frac{2+sh2}{sh1}$.)

3.6. L: $\rho = a(1+\cos\varphi)$, $0 \le \varphi \le \pi$, кардиоида доғасы.

(Жауабы: $x_c = y_c = \dfrac{4}{5a}$.)

3.7. L: $\rho = ae^{\varphi}$, $\dfrac{\pi}{2} \le \varphi \le \pi$, логарифмдік спираль доғасы.

(Жауабы: $x_c = -\dfrac{a}{5} \cdot \dfrac{2e^{2\pi}+e^{\pi}}{5e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$, $y_c = \dfrac{a}{5} \cdot \dfrac{e^{2\pi}-2e^{\pi}}{e^{\pi}-e^{\frac{\pi}{2}}}$.)

3.8. L: $x = 3(t-\sin t)$, $y = 3(1-\cos t)$ циклоидасының бір аркасы. **(Жауабы:** $x_c = 3\pi$, $y_c = 4$.)

3.9. L: $x = 2\cos^3\dfrac{t}{4}$, $y = 2\sin^3\dfrac{t}{4}$ астроидасының бірінші квадранттары доғасы. **(Жауабы:** $x_c = y_c = \dfrac{4}{5}$.)

3.10. L: $x = e^t \sin t$, $y = e^t \cos t$, $0 \le t \le \dfrac{\pi}{2}$ қисық доғасы.

(Жауабы: $x = \dfrac{2e^{\pi}+1}{5\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)}$, $y_c = \dfrac{e^{\pi}-2}{5\left(e^{\frac{\pi}{2}}-1\right)}$.)

3.11. L: $\rho = 2(1+\cos\varphi)$ кардиоидасы. **Жауабы:** $x_c = 1{,}6$; $y_c = 0$.)

3.12. L: ρ=2sinφ қисығының (0,0) нүктеден $\left(\sqrt{2}, \dfrac{\pi}{4}\right)$ нүктеге дейінгі **доғасы.** **(Жауабы:** $x_c = \dfrac{2}{\pi}$; $y_c = \dfrac{\pi-2}{\pi}$.)

3.13. L: $x = a(\cos t + t\sin t)$, $y = a(\sin t - t\cos t)$, $0 \le t \le \pi$ шеңберлі ұңғы доғасы. **(Жауабы:** $x_c = \dfrac{2(\pi^2+4)}{a\pi^2}$, $y_c = \dfrac{6a}{\pi}$.)

3.14. L: $\rho = 2\sqrt{3}\cos\varphi,\ 0 \le \varphi \le \frac{\pi}{4}$, қисық доғасы.

(**Жауабы:** $x_c = \frac{\sqrt{3}(\pi+2)}{\pi},\ y_c = \frac{2\sqrt{3}}{\pi}$.)

3.15. L: $x = \sqrt{3}t^2,\ y = t - t^3,\ 0 \le t \le 1$ қисығы.

(**Жауабы:** $x_c = \frac{7\sqrt{3}}{15},\ y_c = \frac{1}{4}$.)

Келесі есептерде берілген қисықтармен шенелген жазық біртекті Φ фигурасының масса центрінің табу керек.

3.16. Φ – қабырғалары $x + y = a$, $x = 0$, $y = 0$ түзулерінде жатқан үшбұрыш. (**Жауабы:** $x_c = y_c = \frac{a}{3}$.)

3.17. Φ фигурасы $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ – эллипсімен және координат өстерімен $(x \ge 0,\ y \ge 0)$ шенелген. (**Жауабы:** $x_c = \frac{4a}{3\pi},\ y_c = \frac{4b}{3\pi}$.)

3.18. Φ – $x = a(t - \sin t),\ y = a(1 - \cos t)$ циклоидасының бірінші аркасымен және Ox өсімен шенелген.

(**Жауабы:** $x_c = \pi a,\ y_c = \frac{5a}{6}$.)

3.19. Ф – $y = x^2,\ y = \sqrt{x}$ – қисықтарымен шенелген.

(**Жауабы:** $x_c = y_c = \frac{9}{20}$.)

3.20. Ф – $y = \sin x$ синусоидасы мен Ox өсінің кесіндісімен шенелген. (**Жауабы:** $x_c = \frac{\pi}{2},\ y_c = \frac{\pi}{8}$.)

3.21. Ф – $y = \sqrt{R^2 - x^2}$ жарты шеңберімен және Ox өсімен шенелген. (**Жауабы:** $x_c = 0,\ y_c = \frac{4R}{3\pi}$.)

3.22. Ф – $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$, $(a > 0,\ b > 0)$ парабола доғасымен, Ox өсімен және $x = b$ түзуімен шенелген.(**Ж:** $x_c = \frac{3b}{5}$, $y_c = \frac{3\sqrt{b^3}}{8\sqrt{a}}$.)

3.23. Ф – $y = b\sqrt{\frac{x}{a}}$, $a > 0,\ b > 0$ – парабола доғасымен, Oy өсімен және $y = b$ түзуімен шенелген. (**Жауабы:** $x_c = \frac{3a}{10}$, $y_c = \frac{3b}{4}$.)

3.24. Ф – тұйық $y^2 = ax^3 - x^4$ сызығымен шенелген.

(**Жауабы:** $x_c = \frac{5a}{8}$, $y_c = 0$.)

3.25. Ф – координат өстерімен және астроиданың бірінші квадранттағы доғасымен шенелген. (**Жауабы:** $x_c = y_c = \frac{256a}{315\pi}$.)

3.26. Ф – радиусы R центрлік бұрышы $2a$ тең дөңгелек секторы.

(**Жауабы:** масса центрі симметрия өсінде дөңгелек центрінен $\frac{2}{3}R\frac{\sin\alpha}{\alpha}$ қашықтықта жатыр.)

3.27. Ф – $\rho = a(1 + \cos\varphi)$ – кардиоидасымен шенелген.

(**Жауабы:** $x_c = \frac{3a}{10}$, $y_c = \frac{3b}{4}$.)

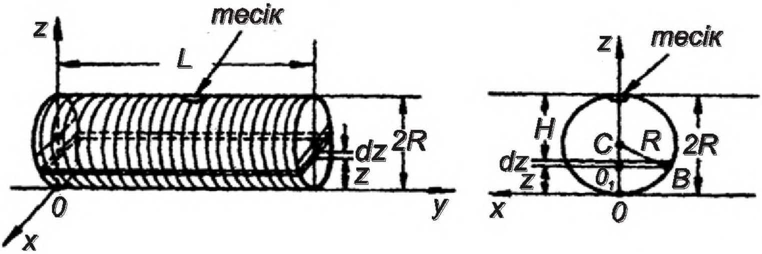
3.28. Ф – $\rho^3 = a^2\cos 2\varphi$ – Бернулли лемнискатасының бірінші тұзағымен шенелген. (**Жауабы:** $x_c = \frac{\sqrt{2}\pi a}{8}$, $y_c = 0$.)

3.29. Ф – координат өстерімен және $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ параболасымен шенелген. (**Жауабы:** $x_c = y_c = \frac{a}{5}$.)

3.30. Ф – $ay^2 = x^3$ – жартылай кубтың параболамен және $x = a$, $a > 0$ түзуімен шенелген. (**Жауабы:** $x_c = \frac{5a}{7}, \, y_c = 0.$)

8.3–ҮТ шығару үлгісі

1. Бүйірінде жатқан дөңгелек цилиндр тәріздес резервуардың ұзындығы $L = 5$ м және табан радиусы $R = 1$ м (114-сурет). Оның жоғарыда орналасқан тесігі арқылы ішіндегі суды сорып шығаруға жұмсалатын A жұмысты анықтау керек. Судың меншікті салмағы $\gamma = 9{,}81 \, \frac{кН}{м^3}$. (Нәтижені бүтін бөлікке дейін дөңгелектеу керек).



114-сурет

► Биіктігі z тең жерде қабаты dz тең суды аламыз. Оның

Көлемі $dV = 2|O_1B|Ldz = 2L\sqrt{R^2 - (R-z)^2}\,dz = 2L\sqrt{z(2R-z)}\,dz.$

Осы қабат суды $H = 2R - z$ биіктігіне көтеру керек. dz – қабат суды шығаруға жұмсалатын элементар жұмыс келесі формуламен анықталады:

$$dA = H\gamma dV = 2\gamma L(2R - z)\sqrt{z(2R-z)}\,dz.$$

Барлық суды шығаруға жұмсалатын жұмыс барлық элементар жұмыстардың қосындысына тең:

$$A = \int_0^{2R} dA = \int_0^{2R} 2\gamma L(2R-z)\sqrt{z(2R-z)}\,dz = 2\gamma L \int_0^{2R} z^{\frac{1}{2}}(2R-z)^{\frac{3}{2}}\,dz. \qquad (1)$$